Analyse - Agrégation 1967

Dans $\mathbb{C}$ on désigne par $\delta(v,\rho)$ le disque ouvert de centre v et de rayon $\rho > 0$, par $\overline{\delta}(v,\rho)$ son adhérence, par $\gamma(v,\rho)$ sa frontière, éventuellement orientée de façon que :

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(v,\rho)}\frac{dx}{x-v} = 1 \ .$$

$\mathbb{C}^2$ est muni de la topologie-produit. Dans $\mathbb{C}^2$, on appelle polydisque de centre $w = (w_1, w_2)$ et de rayon $r = (r_1, r_2)$ où r_1 et r_2 sont des réels strictement positifs, et on note $\Delta(w,r)$ l'ensemble des $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ tels que :

$$|z_j - w_j| < r_j \quad , \quad j = 1, 2 \ ;$$

son adhérence est notée $\overline{\Delta}(w,r)$.

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^2$.

f étant une fonction définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$, la valeur de f au point $z = (z_1, z_2)$ sera notée soit $f(z)$, soit $f(z_1, z_2)$.

(a_1, a_2) étant un point de D, on désigne par $D^1_{a_1}$ (resp. $D^2_{a_2}$) l'ouvert de $\mathbb{C}$ formé des z_2 (resp. z_1) tels que (a_1, z_2) (resp. (z_1, a_2)) soit dans D, et par $f^1_{a_1}$ (resp. $f^2_{a_2}$) la fonction définie sur $D^1_{a_1}$ (resp. $D^2_{a_2}$) par la relation:

$$f^1_{a_1}(z_2) = f(a_1, z_2) \quad [\text{resp. } f^2_{a_2}(z_1) = f(z_1, a_2)]$$

On appelle $\mathcal{O}_D$ l'ensemble des fonctions f définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$, telles que tout point $w = (w_1, w_2)$ de D possède dans D un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ dans lequel f admet un développement en série entière double :

$$(1) \qquad f(z_1, z_2) = \sum_{n_1, n_2}^{\infty} a_{n_1,n_2}(z_1 - w_1)^{n_1}(z_2 - w_2)^{n_2}$$

convergent pour tout $z = (z_1, z_2)$ de $\mathcal{U}$. Une fonction appartenant à $\mathcal{O}_D$ est dite analytique sur D.

Partie I

On donne un ouvert D de $\mathbb{C}^2$ et une fonction f définie sur D et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. On suppose que $f \in \mathcal{O}_D$.
   (a) Montrer que, pour tout w de D, la série (1) est absolument et uniformément convergente dans tout polydisque $\Delta(w,r)$ où r_1 et r_2 sont suffisamment petits.
   (b) Montrer que f est continue sur D et que, pour tout (a_1, a_2) de D, les fonctions $f^1_{a_1}$ et $f^2_{a_2}$ sont analytiques respectivement sur $D^1_{a_1}$ et sur $D^2_{a_2}$.
   (c) Montrer que f a des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial z_1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial z_2}$ qui appartiennent à $\mathcal{O}_D$, et que le développement (1) au point w est unique.
2. On suppose f continue sur D, et, pour tout (a_1, a_2) de D, $f^j_{a_j}$ analytique sur $D^j_{a_j}$ ($j = 1, 2$).
   Montrer que f appartient à $\mathcal{O}_D$
   [on pourra appliquer deux fois la formule intégrale de Cauchy à une variable] .
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}_D$ est un sous-anneau de l'anneau des fonctions continues sur D. Quels sont les éléments inversibles de $\mathcal{O}_D$?

4. On suppose dans cette question que D est connexe :

   (a) Soit f un élément de $\mathcal{O}_D$. Montrer que f est constante dans les deux cas suivants :
      - $f(z)$ est réel pour tout z de D.
      - $|f(z)|$ est constant pour tout z de D.

   (b) Soit f et g deux éléments de $\mathcal{O}_D$. Montrer que, s'il existe un ouvert non vide de D sur lequel les restrictions de f et g sont égales, alors f et g sont égales.

Partie II

Soit $\mathcal{C}_D$ l'anneau des fonctions continues sur l'ouvert D de $\mathbb{C}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

1. Pour tout compact K contenu dans D, et pour tout f de $\mathcal{C}_D$, on pose :

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|.$$

   Montrer que, pour tout couple f, g d'éléments de $\mathcal{C}_D$, on a :

$$\|f + g\|_K \leq \|f\|_K + \|g\|_K$$

$$\|fg\|_K \leq \|f\|_K . \|g\|_K .$$

   K étant donné, l'application $f \mapsto \|f\|_K$ est-elle une norme sur $\mathcal{C}_D$?

2. Une suite de compacts K_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ de D est appelée une $\mathcal{A}$-famille de D si :

   - $\forall n \in \mathbb{N}^*, K_n \subset K_{n+1}$.
   - $\displaystyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} K_n = D$.
   - Tout compact de D est contenu dans au moins l'un des K_n.

   (a) En considérant les polydisques fermés $\overline{\Delta}(z, r)$ contenus dans D, tels que les parties réelles et imaginaires de z_1 et de z_2 soient des nombres rationnels ainsi que r_1 et r_2, construire une $\mathcal{A}$-famille de D.

   (b) On donne une $\mathcal{A}$-famille de D. Pour tout couple f, g d'éléments de $\mathcal{C}_D$, on pose :

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \; \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}}.$$

   Montrer que d est une distance sur $\mathcal{C}_D$.

   On suppose désormais que $\mathcal{C}_D$ est muni de la topologie associée à d.

3. Montrer qu'une suite (f_p) d'éléments de $\mathcal{C}_D$ est convergente si et seulement si, pour tout compact K de D, la suite des restrictions des f_p à K est uniformément convergente sur K.

4. $\mathcal{C}_D$ est-il complet pour d ?

5. Les deux applications

$$(f, g) \mapsto f + g \quad \text{et} \quad (f, g) \mapsto fg$$

   de $\mathcal{C}_D \times \mathcal{C}_D$ dans $\mathcal{C}_D$ sont-elles continues ?

6. L'ensemble $\mathcal{O}_D$ est-il fermé dans $\mathcal{C}_D$?

Partie III

On note $\widetilde{\omega}$ l'élément $(0,0)$ de $\mathbb{C}^2$. $\Delta(\widetilde{\omega},r)$ est un polydisque donné de $\mathbb{C}^2$.

1. Soit g une fonction non identiquement nulle de $\mathcal{O}_{\Delta(\widetilde{\omega},r)}$ telle que g_0^1 admette 0 comme zéro d'ordre k ($k \in \mathbb{N}^*$).

   (a) Montrer qu'il existe un polydisque $\Delta(\widetilde{\omega},s)$ contenu dans $\Delta(\widetilde{\omega},r)$ tel qu'en posant :

   $$\theta = \inf_{z_2 \in \gamma(0,s_2)} |g_0^1(z_2)|$$

   on ait : $\theta > 0$ et, pour tout z_1 de $\delta(0,s_1)$ et pour tout z_2 de $\gamma(0,s_2)$,

   $$|g(z_1,z_2) - g(0,z_2)| < \theta.$$

   (b) Montrer que, pour tout a_1 de $\delta(0,s_1)$, $g_{a_1}^1$ a exactement k zéros dans $\delta(0,s_2)$, chaque zéro étant compté avec son ordre de multiplicité.

   (c) Montrer que l'ensemble X des zéros de g dans $\Delta(\widetilde{\omega},r)$ est fermé dans ce polydisque et n'a aucun point intérieur.

2. Y désigne le complémentaire de X dans $\Delta(\widetilde{\omega},r)$; f est une fonction appartenant à $\mathcal{O}_Y$ et bornée.

   (a) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ définie sur $\Delta(\widetilde{\omega},s)$ par :

   $$\widehat{f}(z_1,z_2) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,s_2)} \frac{f(z_1,x)}{x-z_2}dx$$

   est un élément de $\mathcal{O}_{\Delta(\widetilde{\omega},s)}$.

   (b) Montrer que, pour tout z de $Y \cap \Delta(\widetilde{\omega},s)$, on a :

   $$\widehat{f}(z) = f(z).$$

Partie IV

Soit $\mathcal{V}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{C}^2$ contenant $\widetilde{\omega} = (0,0)$. On appelle $\mathcal{O}$ la réunion des ensembles $\mathcal{O}_V$, lorsque V parcourt $\mathcal{V}$.

Pour tout f de $\mathcal{O}$, on note $V(f)$ l'ouvert de définition de f.

1. Soit $\mathcal{R}$ la relation suivante entre deux éléments quelconques f et g de $\mathcal{O}$: $f\mathcal{R}g$ si et seulement s'il existe un V de $\mathcal{V}$ contenu dans $V(f) \cap V(g)$, tel que les restrictions de f et g à V soient égales.

   Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

   On pose $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}/\mathcal{R}$ et on note $\widetilde{f}$ la classe d'équivalence d'un élément f de $\mathcal{O}$.

2. (a) Montrer que $\widetilde{\mathcal{O}}$ est un anneau isomorphe à l'anneau des séries entières doubles

   $$\sum_{n_1,n_2}^{\infty} a_{n_1,n_2} z_1^{n_1} z_2^{n_2} \quad (a_{n_1,n_2} \in \mathbb{C})$$

   dont le domaine de convergence n'est pas réduit à $\{\widetilde{\omega}\}$.

   (b) L'anneau $\widetilde{\mathcal{O}}$ est-il intègre ? Montrer que les éléments non inversibles de $\widetilde{\mathcal{O}}$ forment le seul idéal maximal de $\widetilde{\mathcal{O}}$.

3. Soit f un élément non identiquement nul de $\mathcal{O}$ tel que la fonction f_0^1 admette 0 pour zéro d'ordre k.

   (a) Montrer qu'il existe $s = (s_2, s_2)$ et des fonctions σ_j $(j = 1, \ldots, k)$ définies sur $\delta(0, s_1)$ et nulles en 0, tels que :

   - $\Delta(\widetilde{\omega}, s)$ soit contenu dans $V(f)$.
   - la fonction h définie sur $\Delta(\widetilde{\omega}, s)$ par :

   $$h(z_1, z_2) = z_2^k + z_2^{k-1}\sigma_1(z_1) + \cdots + \sigma_k(z_1)$$

   ait dans $\Delta(\widetilde{\omega}, s)$ les mêmes zéros que f.

   (b) Calculer :

   $$\frac{1}{2i\pi}\int_{\gamma(0,s_2)} \frac{x^n}{f(z_1,x)}\frac{\partial f}{\partial z_2}(z_1,x)dx \quad (n \in \mathsf{N}).$$

   Montrer que la somme des puissances $n^{ièmes}$ des zéros de $f_{z_1}^1$ dans $\delta(0, s_2)$ est une fonction analytique sur $\delta(0, s_1)$ et qu'il en est de même des σ_j.

   (c) Montrer qu'il existe un élément inversible $\widetilde{u}$ de $\widetilde{\mathcal{O}}$ tel que :

   $$\widetilde{f} = \widetilde{u}\,\widetilde{h}.$$